

Die Rettung der Mathematik durch die Semiotik

1. Man schaue sich die folgenden Gleichungen an:

$$(1) \quad 3 + 2 + 1 = 6$$

$$(2) \quad \blacksquare + \bullet + \circ = ?$$

$$(3) \quad 3 + \bullet + 1 = ?$$

Wir vereinbaren, dass \blacksquare für einen Apfel, \bullet für eine Birne und \circ für eine Orange steht. Dann ist also (1) eine rein quantitative Gleichung, (2) eine rein qualitative Gleichung und (3) eine gemischt quantitativ-qualitative Gleichung. Während die Gleichung (1) lösbar ist, sind die Gleichungen (2) und (3) unlösbar. Warum? Es wird unterstellt, dass Zahlen – und zwar ganz egal, um welche Zahlen zwischen natürlichen Zahlen und Quaternionen es sich handelt, auf homogene Objekte referieren und somit den selben arithmetischen Operationen unterworfen werden können. Eine Gleichung wie

$$(4) \quad 3 + 2 + 1 = 7$$

wäre also nicht notwendig falsch, sondern würde implizieren, dass mindestens einer der Summanden für ein inhomogenes Objekt steht und die zu addierenden Größen daher nicht vergleichbar sind. Und genau dies ist der Fall bei (2) und (3): Wir lernen schon auf der Schule, dass man Äpfel und Birnen nicht addieren könne. Warum eigentlich nicht? Im Kopfe wissen wir doch, dass die Addition eine Menge aus zwei Früchten ergibt, von denen die eine Frucht ein Apfel und die andere Frucht eine Birne ist.

Streng genommen addieren wir in den obigen Gleichungen aber gar keine Objekte – man kann Objekte zusammenstellen, wie man Äpfel in eine Kiste legt, aber sie bestimmt nicht einer abstrakt-geistigen Operation unterziehen. Arithemische Operationen sind ja Zeichenprozesse, und Zeichen können nach Benses Invarianzgesetz die Objekte nicht verändern (Bense 1975, S. 40 ff.). Wir addieren also Zahlen, welche für die betreffenden Objekte stehen, d.h. Zeichen. Wenn wir aber Zeichen addieren, so folgt aus den obigen Gleichungen, dass wir bei (1) Zeichen addieren können und bei (2) und (3) Zeichen nicht addieren können – und zwar obwohl die Zeichen für die Objekte auch bei (2) und (3)

definiert sind. Wir haben hier also ein klassisches Paradox vor uns. Ferner lehrt uns die elementare Algebra, dass mathematische Zeichen simple Platzhalter sind. Für

$$(5) \quad x + y = z$$

können irgendwelche Zeichen eingesetzt werden, die Qualität der Objekte interessiert nicht. Wenn das aber wirklich stimmen würde, warum ist dann (5) für $x = \text{Apfel}$ und $y = \text{Birne}$ nicht lösbar? Hier liegt also ein weiterer Widerspruch in den elementarsten Grundlagen der Mathematik.

2. Nach allem, was wir bisher gehört haben, spielen also die Objekte, auf welche die Zeichen referieren, trotzdem eine Rolle, und zwar müssen die Zeichen, wie wir bereits in der Schule lernen, auf homogene Objekte referieren. Damit sind also Äpfel unter sich, Birnen unter sich, Orangen unter sich, usw. gemeint. Die mathematischen Zeichen müssen daher im semiotischen Sinne Bezeichnungsfunktionen sein, d.h. die abstrakte Form

$$Z = (1 \rightarrow 2)$$

aufweisen, worin “1” für das Zeichen als Mittel – das angeblich allein in der Mathematik zählt – und “2” wird das Objekt, das gezählt wird, steht. Zahlen sind also unvollständige Zeichen, Subzeichen, genauer Bezeichnungsfunktionen, die durch die Abwesenheit von Bedeutungsfunktionen und damit des Interpretantenbezug die Eindeutigkeit von $(1 \rightarrow 2)$ durch Ausschluss der Interpretation garantieren. Die klassische quantitative Mathematik funktioniert also nur auf der niemals reflektierten Annahme, dass die durch 2 bezeichneten Objekte stets die gleichen sind, womit also die stets unterstellte Homogenität dieser Objekte garantiert wird.

Dass das in Wahrheit nicht so ist, sollte allerdings schon einem erstsemestrigen Studenten der Mathematik klar sein, denn dass natürliche, rationale, irrationale, transzendente, reelle, komplexe und andere Zahlen wie Quaternionen oder Oktonionen völlig verschiedene Objekte sind, ist unmittelbar klar. Schon bei algebraischen Zahlen wie $\sqrt{2}$ kann man wenigstens nicht mehr im Sinne der klassischen Ontologie von “Objekten” reden. Wenn wir also eine Gleichung aufstellen wie

$$(6) \quad 4 + \sqrt{2} + \sqrt{-1} = 5,414 + i$$

so ist diese zwar lösbar, aber die drei Summanden und die Summe stehen für nicht weniger als 4 verschiedene Objekte, d.h. die obige Gleichung ist um keinen Deut weniger qualitativ als wenn wir schreiben

$$(2) \quad \blacksquare + \bullet + \circ = 24 - j,$$

wobei es ganz egal ist, was “j” bezeichnet. In (6) ebenso wie in (2) haben alle Glieder der Gleichung verschiedene Objektbezüge, und die Tatsache, dass in der klassischen Mathematik (6), aber nicht (2) lösbar ist, beruht auf der impliziten, unreflektierten und unbewiesenen Voraussetzung, dass es statthaft sei, verschiedene Qualitäten wie eine Qualität, d.h. inhomogene Objekte als homogene zu behandeln. Dieser Prozess der “Homogenisierung von Objekten” wird seit Hegel dadurch erklärt, dass die klassische Mathematik “alle Qualitäten bis auf die eine Qualität der Quantität” eliminiert habe. Dass das jedoch unstatthaft ist, hatten wir bereits gesehen: Eine angeblich statthaftfe “Lösung” einer Gleichung wie $(5,414 + i)$, wo also eine ein- und eine zweidimensionale Zahl, ferner eine irrationale und eine imaginäre Zahl scheinbar addiert werden, ist um nichts mehr wert als der nicht-statthafte Ausdruck (1 Apfel + 2 Birnen).

3. Die Mathematik ist also überhaupt nicht quantitativ, und wenn sie so tut, dann basiert sie auf lauter Fehlannahmen. Genauso gut könnte man nämlich alle Qualitäten dieser Welt auf die eine Qualität “rot” reduzieren. Dann wäre es unmöglich, Zahlen zu addieren, weil Farbqualitäten nicht zu deren Definitionen gehören, wohl aber Ausdrücke wie (Sonne + Feuer), (Blut + Rotstift) oder (Sonnenbrand + Sangria). Was hier absolut lächerlich erscheint, ist aber weniger lächerlich als alle Objekte auf deren Quantität zu reduzieren, denn die Quantität spielt bei den allerwenigsten Objekten dieser Welt eine Rolle. Ferner lassen sich viele Objekte überhaupt nicht abzählen. Sinnvoll wäre die Quantitätsreduktion nur dann, wenn sie auf die Objekte Rücksicht nähme, d.h. aber qualitativ gebunden wäre, wenn also die Höhe eines Tisches, die Stunden, die eine Reise benötigt oder das Gewicht einer Person bestimmt werden. In einer Mathematik jedoch, wo die Quantität nicht mit den individuellen Qualitäten der Objekte koordiniert ist, ist es unsinnigerweise möglich, etwa die Höhe eines Tisches in Sekunden oder das Gewicht einer Person in Zentimetern zu bestimmen, denn nichts hindert uns, etwa in (5) für $x = 2$ und für $y = 3$ zu setzen

$$2 + 3 = 5$$

und den Ausdruck wie folgt zu interpretieren: “2 Sekunden plus 3 Tonnen ist gleich 5 Meter”, denn die Masseinheiten sind ja an Qualitäten gebunden, und diese spielen in algebraischen Platzhaltergleichungen keine Rolle.

Gibt es überhaupt Objekte, die nicht qualitativ sind? Die Beantwortung dieser Frage würde wohl von der Definition von Objekt abhängen. Im Sinne der klassischen Ontologie, wo unter Objekt ein Gegenstand verstanden wird, ist dieser mit unseren Sinnen wahrnehmbar. Damit muss er aber notwendigerweise qualitativ sein, und seine quantitative Apperzeption stellt eine sekundäre Abstraktion und daher eine Interpretation dar. Es wird oft gesagt, dass gewisse Vogelarten nicht zählen könnten, wie viele Brotstücke ihnen vorgelegt werden, aber dass es sich um Brot – oder wenigstens um das qualitative Konzept “Essbares” - handelt, das wissen sie wohl. Wie gesagt: Der mathematische Objektbegriff ist nicht nur deshalb problematisch, weil Dinge wie $3,1415 \dots$ oder $i = \sqrt{-1}$ keine klassischen Objekte sind, auch nicht nur deshalb, weil sämtliche Zahlbereiche auf anderen Zahlobjekten basieren, sondern grundsätzlich wegen der unreflektierten Annahme, dass man aus den ein Objekt definierenden Qualitäten ein beliebiges Merkmal herausgreifen und das Objekt auf es allein reduzieren könne. Streng genommen, bleibt aber die klassische Mathematik sogar in diesem Fall noch qualitativ, nur wird sie vollkommen absurd.

4. Ein ebenfalls konstant übersehenes Problem liegt jedoch in der sprachlichen Interpretation und nicht in den mathematischen Gleichungen selber. So wird oft gesagt, 1 Apfel + 1 Apfel ergäbe eben “2 Früchte”, und dieses Ergebnis wird zur Illustration der qualitativen Reduktion auf die Quantität angegeben: Danach ist “Frucht” sozusagen der quantitative Kern eines Apfel, einer Birne, etc., nachdem die Qualitäten entfernt wurden oder der “kleinste gemeinsame Merkmalsteiler” der Objekte Apfel, Birne, etc. Wie bereits gesagt, wenn wir nach der Lösung der Gleichung 1 Apfel + 1 Birne gefragt werden, dann ist uns wohl bewusst, dass es sich um 2 Objekte handelt, wobei das eine ein Apfel und das andere eine Birne ist. Die “Lösung” der qualitativen Gleichung wird uns also nicht etwa durch die quantitative Mathematik verunmöglicht, sondern dadurch, dass uns ein Wort in unserer Sprache fehlt, das eine Menge bestehend aus Äpfeln und Birnen zusammenfasst. Gäbe es ein solches Wort, könnte man etwa folgende Vereinbarung machen: Wir kürzen inhomogene Objekte mit grossen Buchstaben (A, B, C, ...) ab und drücken durch blosse Juxtaposition aus, dass sie nicht weiter zusammengefasst werden können:

$$(7) \quad 1 \text{ Apfel} + 1 \text{ Birne} = 2 \text{ AB}$$

Diese Gleichung ist um nichts absonderlicher als

$$(6) \quad 4 + \sqrt{2} + \sqrt{-1} = 5,414 + i$$

5. Semiotisch gesprochen, liegt die Lösung des Problems natürlich in der Einsicht, dass “Zeichen”, die nur aus Bezeichnungsfunktionen bzw. Objektbezügen bestehen, sinnlos sind. Solche Subzeichen werden erst dann zum Zeichen, wenn sie durch einen Interpretantenbezug in eine Bedeutungsrelation eingebettet werden:

$$(8) \quad ((1 \rightarrow (1 \rightarrow 2)) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)) \rightarrow (1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)))$$

Dies ist so zu lesen: Zunächst wird ein Mittel auf einen Objektbezug abgebildet, und dieses Gebilde wird auf einen Interpretantenbezug abgebildet. Das Resultat aber muss darin bestehen, dass das Mittel im Objektbezug und beide zusammen im Interpretantenbezug enthalten sind. Diese semiotische Operation gibt den Objekten ihre Qualität zurück, indem sie die Interpretation zulässt. D.h. bei jedem Objekt wird geprüft, ob und welche Quantitäten sinnvoll sind. Was hier getan wird, ist also das genaue Gegenteil von dem, was Günther mit seiner Kenogrammatik bezweckte: Er versuchte die bereits von den Qualitäten befreiten Zahlen zusätzlich noch von den Quantitäten zu befreien. Dies resultiert aber in einen Kalkül von Formen und in nichts, das auch nur entfernt mit Mathematik zu tun hat.

6. Um die Mathematik zu retten, bleibt uns also nur übrig, sie auf die Semotik aufzubauen, denn die Semiotik ist die einzige Wissenschaft, welche auf Zeichenklassen aufgebaut ist, die die “kleinsten gemeinsamen Vielfachen” der Qualitäten enthalten. Um nicht durch Wahl von Zeichen den Eindruck einer quantitativen Reduktion zu erwecken, schreiben wir die semiotische Matrix wie folgt:

$$\left(\begin{array}{ccc} \triangle & \blacktriangle & \blacktriangle \\ \square & \blacksquare & \blacksquare \\ \circ & \bullet & \bullet \end{array} \right)$$

Danach können also Zeichenklassen wie folgt geschrieben werden:

$$(9) \quad (3.1 \ 2.1 \ 1.3) \rightarrow (\circ \ \square \ \blacktriangle)$$

$$(10) \quad (3.1 \ 2.3 \ 1.3) \rightarrow (\circ \blacksquare \blacktriangle)$$

Walther charakterisiert (9) wie folgt: “allgemeiner Typus (oder ein allgemeines Gesetz), dessen einzelne Momente bestimmte Qualitäten einschliessen müssen, damit es im Interpretieren die Idee eines solchen Objektes hervorruft” (1979, S. 83), und (10): “ein Zeichen, das mit seinem Objekt durch eine Assoziation allgemeiner Idee verbunden ist” (1979, S. 84). Als Beispiel nennt Walther für (9) “eine typische Fieberkurve” und für (10) einen “Namen”.

Wie gelangt man also von einer Fieberkurve zu einem Namen, von einem Diagramm zu einem Wort? Da gibt es keinen quantitativen Weg, auch wenn man die Zeichenklassen eindeutig mit ihren trichotomischen Werten allein schreiben kann:

$$(9)' \quad (3.1 \ 2.1 \ 1.3) \rightarrow (113)$$

$$(10)' \quad (3.1 \ 2.3 \ 1.3) \rightarrow (133)$$

Eine solche quantitative Notation würde einen zur folgenden Subtraktion hinreissen lassen:

$$(133) - (113) = 20 \text{ (bzw. } 020)$$

Damit hätten wir also z.B.

$$\begin{aligned} \text{Wort} - 20 &= \text{Fieberkurve,} \\ \text{Wort/Fieberkurve} &= 20 = 40/2 \\ 20 \cdot \text{Fieberkurve} &= \text{Wort, etc.} \end{aligned}$$

Das ist es genau, was die klassische Mathematik tut: Ein Wort ist ein 1-dimensionales lineares Objekt, eine Fieberkurve ist ein 2-dimensionales flächiges Objekt, und wenn man $(4 + \sqrt{2} + \sqrt{-1} = 5,414 + i)$ berechnen darf, darf man auch die obigen drei Gleichungen berechnen.

Objekte können nur als Zeichen wahrgenommen werden, weil nur das gegeben ist, was repräsentierbar ist (Bense 1981, S. 11). Zeichen setzen aber eine vollständige triadische Relation und nicht nur eine Bezeichnungsfunktion hinter den vorgeblichen Monaden voraus, wie es die Mathematik tut. In triadischen Zeichenrelationen sind allerdings die Quantitäten zusammen mit ihren Qualitäten erhalten. Gleichzeitig bilden aber die 10 Peirceschen Zeichenklassen das minimale Reduktionssystem der Repräsentation und damit auch der

Objekte. Das bedeutet, dass das Peircesche Zehnersystem die “kleinsten gemeinsamen Vielfachen aller Qualitäten” darstellt. Die Semiotik stellt damit die minimale abstrakte Basis und das minimale formale Organon dar, hinter das zum Preise von Absurdität nicht mehr zurückgegangen werden darf. Ohne die Semiotik ist somit die klassische Mathematik ein System von Absurditäten, die bereits dann auftreten, wenn Zahlen aus verschiedenen Zahlbereichen durch arithmetische Operationen verknüpft werden sollen. Nicht in der weiteren Reduktion zum Nichts der Kenogrammatik liegt daher die Rettung der Mathematik, sondern in der Wiederherstellung des Pythagoreischen quanti-qualitativen bzw. quali-quantitativen Zahlbegriffs durch Rekonstruktion des semiotischen Interpretantenbezugs und Wiedervervollständigung des der Mathematik zugrunde liegenden Subzeichenbegriffs zum vollständigen Zeichenbegriff.

Bibliographie

- Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975
Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981
Walther, Elisabeth, Allgemeine Zeichenlehre. 2. Aufl. Stuttgart 1979

26.6.2009